

## 5 класс (продолжительность — 3 часа)

**5-1.** На дереве сидят красные, синие и зелёные попугаи. Каждый попугай видит хотя бы 10 синих, хотя бы 15 красных и хотя бы 20 зелёных попугаев (сам себя попугай не видит!). Какое наименьшее количество попугаев может сидеть на дереве?

**5-2.** В гостях у бабушки внуки угощались пирожками. И Боря, и Коля взяли по 2 пирожка каждого вида, но съели только по 10 пирожков. Остальные пирожки они принесли домой. Боря принес домой пирожки ровно трёх видов, а Коля — ровно шести видов. Сколько видов пирожков испекла бабушка?

**5-3.** Коля написал на доске десятизначное число. Все его цифры различны. Могло ли ли оказаться, что, вычеркнув две его последние цифры, получим число, делящееся на 2, вычеркнув три его последние цифры, получим число, делящееся на 3, ..., вычеркнув 9 его последних цифр, получим число, делящееся на 9?

**5-4.** Во всех клетках таблицы  $100 \times 100$  стоят черные и белые фишки (по одной фишке в клетке). Сначала Петя снял все черные фишки из столбцов, где есть белые фишки, а затем Вася снял все белые фишки из строк, где еще остались черные фишки. Докажите, что фишек какого-то из цветов на доске не осталось.

**5-5.** В компании 99 человек. Каждый либо соглашатель, либо вредина. Всех по очереди спросили, кого в компании больше — соглашателей или вредин. Каждый, кроме первого, отвечал по правилу: соглашатель отвечал так же, как предыдущий отвечающий, а вредина отвечал наоборот. Оказалось, что 75 человек ответили неверно. Кого в компании было больше: вредин или соглашателей?

**5-6.** На окружности отмечено 77 точек. Двое проводят по очереди отрезки, по одному за ход. Каждый отрезок соединяет две отмеченные точки, и каждый следующий отрезок (кроме первого) исходит из конца предыдущего. Дважды проводить один и тот же отрезок нельзя, даже в противоположных направлениях. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто — первый или второй — может выиграть в этой игре, вне зависимости от действий другого игрока?

## 6 класс (продолжительность — 3 часа)

**6-1.** На круговой трассе, по которой с постоянной скоростью гуляет Иван Иванович, расположено три дерева. Иван Иванович выходит от одного дерева в 8:00. Дойдя до очередного дерева, он либо идет дальше, либо разворачивается в противоположную сторону. А в блокнот записывает время прохождения дерева. В результаты у него в блокноте оказались записи: 8:05, 8:12, 8:19, 8:26, 8:36. За сколько времени Иван Иванович прошел бы весь круг, если бы шел в одну сторону?

**6-2.** Во всех клетках таблицы  $100 \times 100$  стоят черные и белые фишки (по одной фишке в клетке). Сначала Петя снял все черные фишки из столбцов, где есть белые фишки, а затем Вася снял все белые фишки из строк, где еще остались черные фишки. Докажите, что фишек какого-то из цветов на доске не осталось.

**6-3.** В турнире по перетягиванию каната каждый сыграл с каждым по разу. Оказалось, что все выиграли поровну игр. На следующий день к участникам добавился один игрок, и снова был проведен турнир, где каждый сыграл с каждым по разу. Могло ли оказаться так, что и во второй день все выиграли поровну игр? В перетягивании каната ничьих не бывает.

**6-4.** В школе много 6-х классов, в каждом поровну учеников. Оказалось, что в 6А учатся  $\frac{1}{9}$  всех девочек-шестиклассниц и  $\frac{1}{11}$  всех мальчиков-шестиклассников. Докажите, что в нём поровну мальчиков и девочек.

**6-5.** На окружности отмечено 77 точек. Двое проводят по очереди отрезки, по одному за ход. Каждый отрезок соединяет две отмеченные точки, и каждый следующий отрезок (кроме первого) исходит из конца предыдущего. Дважды проводить один и тот же отрезок нельзя, даже в противоположных направлениях. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто — первый или второй — может выиграть в этой игре, вне зависимости от действий другого игрока?

**6-6.** На длинном проводе сидят птицы. За ход между каждыми двумя соседними птицами прилетает одно и то же количество новых птиц: 3, 4 или 5 птиц. При разных ходах это может быть разное количество. Может ли через несколько ходов (больше одного) на проводе оказаться 333444555 птиц?

**7 класс** (продолжительность — 4 часа)

**7-1.** Даша поставил в ряд 10 синих, 10 красных и одну зелёную тарелку в каком-то порядке. На этих тарелках в сумме лежит 200 конфеток, причем на каждой тарелке лежит хотя бы одна конфетка. Известно, что правее одной из синих тарелок лежит 72 конфетки, левее одной из красных — 129 конфеток, а на зелёной — меньше, чем на любой другой. Сколько конфеток может лежать на зелёной тарелке? Найдите все ответы и докажите, что других нет.

**7-2.** Вася рассматривает натуральные числа, начиная с 2, в порядке 2, 3, 4, 5, ... и для каждого числа записывает на доску, произведением скольких простых чисел оно является. Например, для числа 12 Вася напишет на доску 3, так как  $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ , а для числа 13 Вася напишет на доску 1. В какой-то момент Вася впервые записал на доску число 100. Следующее записанное число будет больше 100, равно 100 или меньше 100?

**7-3.** На окружности отмечено 77 точек. Двое проводят по очереди отрезки, по одному за ход. Каждый отрезок соединяет две отмеченные точки, и каждый следующий отрезок (кроме первого) исходит из конца предыдущего. Дважды проводить один и тот же отрезок нельзя, даже в противоположных направлениях. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто — первый или второй — может выиграть в этой игре, вне зависимости от действий другого игрока?

**7-4.** Дан треугольник  $ABC$ . На стороне  $BC$  выбрана точка  $E$ , на стороне  $AC$  выбрана точка  $D$ , при этом оказалось, что  $AD = EC$ ,  $BD = DE$  и  $\angle CDB = \angle BED$ . Найдите длину стороны  $AC$ , если  $AB = 20$ ,  $BE = 7$ .

**7-5.** Клетки доски  $50 \times 50$  покрашены в 10 цветов. Назовём клетку удивительной, если как в её строке, так и в её столбце нет клеток того же цвета. Какое наибольшее количество удивительных клеток может быть в таблице?

**7-6.** По кругу написаны 100 ненулевых чисел. Петя хочет сделать так, чтобы сумма произведений 100 пар соседних чисел была бы неотрицательной, и для этого он может поменять знаки у любых  $k$  чисел по кругу. При каком наименьшем  $k$  Петя всегда сможет добиться своей цели?

**8 класс** (продолжительность — 4 часа)

**8-1.** Даша поставил в ряд 10 синих, 10 красных и одну зелёную тарелку в каком-то порядке. На этих тарелках в сумме лежит 200 конфеток, причем на каждой тарелке лежит хотя бы одна конфетка. Известно, что правее одной из синих тарелок лежит 72 конфетки, левее одной из красных — 129 конфеток, а на зелёной — меньше, чем на любой другой. Сколько конфеток может лежать на зелёной тарелке? Найдите все ответы и докажите, что других нет.

**8-2.** Даны три нецелых числа. Известно, что сумма любых двух из них целая. Может ли произведение всех трёх чисел быть целым числом?

**8-3.** У Маши есть  $N$  карточек, на каждой написано натуральное число. Маша выписала все числа, являющиеся суммами чисел на двух карточках. Оказалось, что среди выписанных чисел есть число с последней цифрой 0, есть число с последней цифрой 1; ...; есть число с последней цифрой 9. Иначе говоря, есть число с любой последней цифрой. Найдите наименьшее возможное значение  $N$ .

**8-4.** В прямоугольном треугольнике  $ABC$  с прямым углом  $B$  проведены биссектрисы  $AA_1$  и  $CC_1$ , пересекающиеся в точке  $I$ . Через точку  $C_1$  провели прямую, перпендикулярную  $AI$ , а через точку  $A_1$  провели прямую, перпендикулярную  $CI$ . Эти две прямые пересеклись в точке  $T$ . Докажите, что середина отрезка  $IT$  лежит на  $AC$ .

**8-5.** По кругу написаны 100 ненулевых чисел. Петя хочет сделать так, чтобы сумма произведений 100 пар соседних чисел была бы неотрицательной, и для этого он может поменять знаки у любых  $k$  чисел по кругу. При каком наименьшем  $k$  Петя всегда сможет добиться своей цели?

**8-6.** Пусть  $n \geq 3$  — целое число. Аня и Боря играют в игру на доске  $n \times n$ , где каждый квадрат окрашен в красный или синий цвет. Ане разрешено как угодно переставлять строки, а Боре разрешено как угодно переставлять столбцы. Раскраска таблицы называется **устойчивой**, если:

- независимо от того, как Аня переставит строки, Боря сможет затем переставить столбцы, чтобы восстановить исходную раскраску;
- и независимо от того, как Боря переставит столбцы, Аня затем сможет переставить строки, чтобы восстановить исходную раскраску. Сколько существует устойчивых раскрасок доски  $n \times n$ ?